УДК 519.86

ЦІЛОЧИСЕЛЬНІ ЗАДАЧІ ПРО РОЗМІЩЕННЯ ВИРОБНИЦТВА

Діденко В.Р.[1]; Стехун А.О., к.ф.-м.н., доц. [2]; Яровий А.Т., к.ф.-м.н., доц. [3]
[1,2,3] Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
[1,2,3] Україна, Одеса
[1] vladyslava.didenko@stud.onu.edu.ua; [2] a.stehun@onu.edu.ua; [3] yarovyiat@onu.edu.ua

Анотація. *Під час дослідження розглянуто цілочисельну задачу оптимального розміщення виробничих потужностей. Для її розв'язання застосовано два підходи: точний та наближений. Проведено порівняльний аналіз результатів та зроблено висновки щодо ефективності обох методів.*

Ключові слова: *цілочисельне програмування; задача розміщення; метод гілок та меж; генетичний алгоритм; оптимізація.*

Вступна частина. В умовах глобалізації ефективне управління логістичними та виробничими процесами набуває ключового значення для успіху будь-якого підприємства. Однією з найважливіших стратегічних задач є оптимальне розміщення виробничих потужностей, оскільки прийняті рішення безпосередньо впливають на загальні витрати, швидкість доставки продукції та рівень задоволеності клієнтів. Задачі такого типу належать до класу оптимізаційних задач і широко досліджуються в межах теорії дослідження операцій, зокрема, за допомогою методів цілочисельного програмування.

Метою дослідження є оцінка ефективності застосування точного та наближеного методів для розв'язання цілочисельної задачі розміщення виробництва на практичному прикладі.

Основна частина. У практичній частині роботи розглядається задача, що виникла перед мережею пекарень, яка планує розширити свою діяльність шляхом будівництва трьох нових хлібозаводів для обслуговування десяти заданих точок продажу. Необхідно обрати три з п'яти можливих локацій для будівництва підприємств таким чином, щоб мінімізувати сумарні транспортні витрати на доставку продукції, задовольнивши при цьому попит кожного з клієнтів та не перевищити виробничі потужності заводів.

Математична постановка задачі має вигляд:

$$Z = \sum_{i \in C} \sum_{j \in F} c_{ij}\, d_i y_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i \in C} d_i \cdot y_{ij} \leq \alpha_j \cdot x_j,\ \forall j \in F$$

$$\sum_{j \in F} y_{ij} = 1,\ \forall i \in C$$

$$y_{ij} \leq x_j,\ \forall i \in C,\ j \in F$$

$$x_j \in \{0, 1\},\ y_{ij} \in \{0, 1\}\ \forall i \in C,\ j \in F,$$

де $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ – множина пекарень (споживачів), $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – множина потенційних локацій для будівництва заводів, d_i – щоденний попит пекарні

$i \in C$ (кг/день), α_j – максимальна виробнича потужність заводу $j \in F$, c_{ij} – ціна доставки одиниці продукції (1 кг) від потенційного заводу $j \in F$ до пекарні $i \in C$.

Дана задача є прикладом задачі про p-медіану з обмеженням на потужність [1]. Для її розв'язання було використано два принципово різних підходи, реалізованих з використанням мови програмування Python.

1. **Метод гілок і меж**. Це **точний метод**, який гарантує знаходження глобального оптимуму [2]. Його суть полягає у розбитті множини допустимих розв'язків на підмножини (гілки) та систематичному їх переборі [3]. Незважаючи на гарантію оптимальності, обчислювальна складність методу може бути дуже високою для задач великої розмірності.
2. **Генетичний алгоритм (ГА).** Це **наближений (евристичний) метод**, що базується на принципах біологічної еволюції [4]. Алгоритм оперує популяцією "особин", кожна з яких представляє собою можливий розв'язок задачі. На кожній ітерації (поколінні) відбувається відбір найкращих особин на основі "функції пристосованості" (тут – значення цільової функції), їх схрещування та мутація для створення нового покоління.

Обидва методи були застосовані для розв'язання задачі з конкретними числовими даними щодо попиту, потужностей та транспортних витрат.

Метод гілок і меж показав, що оптимальним є відкриття заводів у локаціях **№1, №2** та **№4**. Мінімальні загальні витрати на транспортування при цьому становлять **11330 грн/день**.

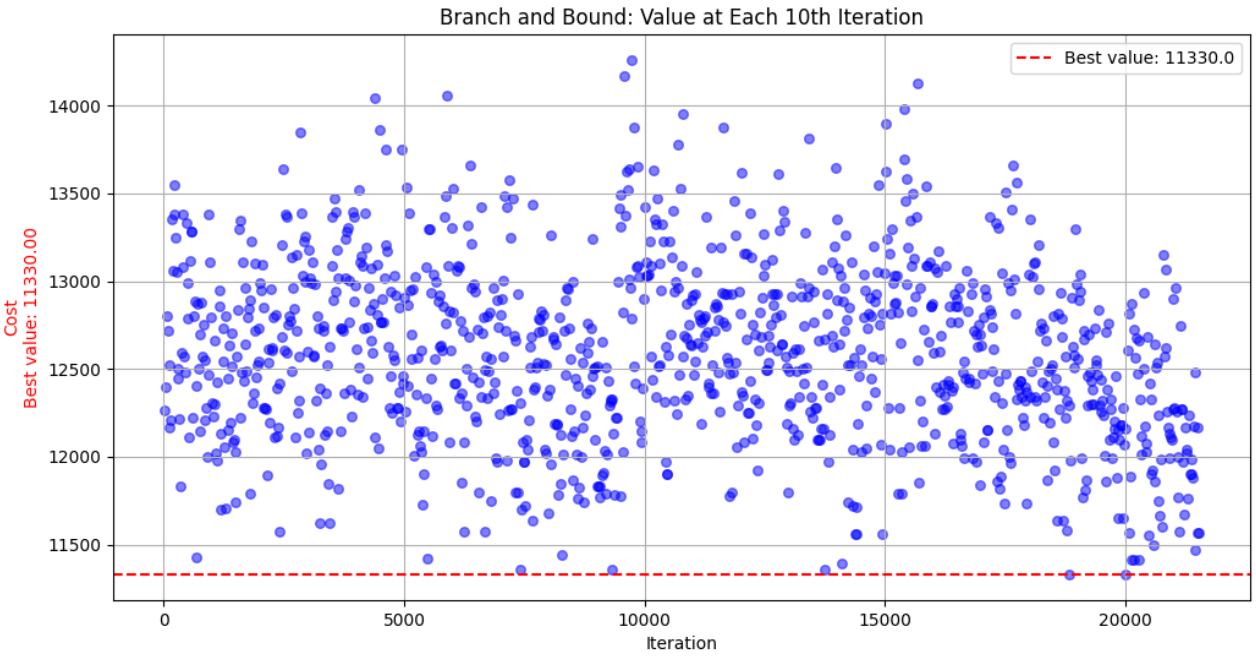

Рисунок 1. Значення цільової функції на кожній десятій ітерації методу гілок і меж

На рисунку 1 зображено зміну значення цільової функції (витрат) на кожній 10-й ітерації методу гілок і меж. Встановлено, що більшість точок розташовані вище за оптимальне значення, позначене червоною лінією, отже лише невелика частина ітерацій призводить до покращення поточного розв'язку.

Генетичний алгоритм після налаштування параметрів (розмір популяції, кількість поколінь, ймовірності кросоверу та мутації) знайшов близький до оптимального, але не

ідентичний розв’язок, що відповідає витратам у 11405 грн/день. Порівняння результатів наведено в таблиці 1.

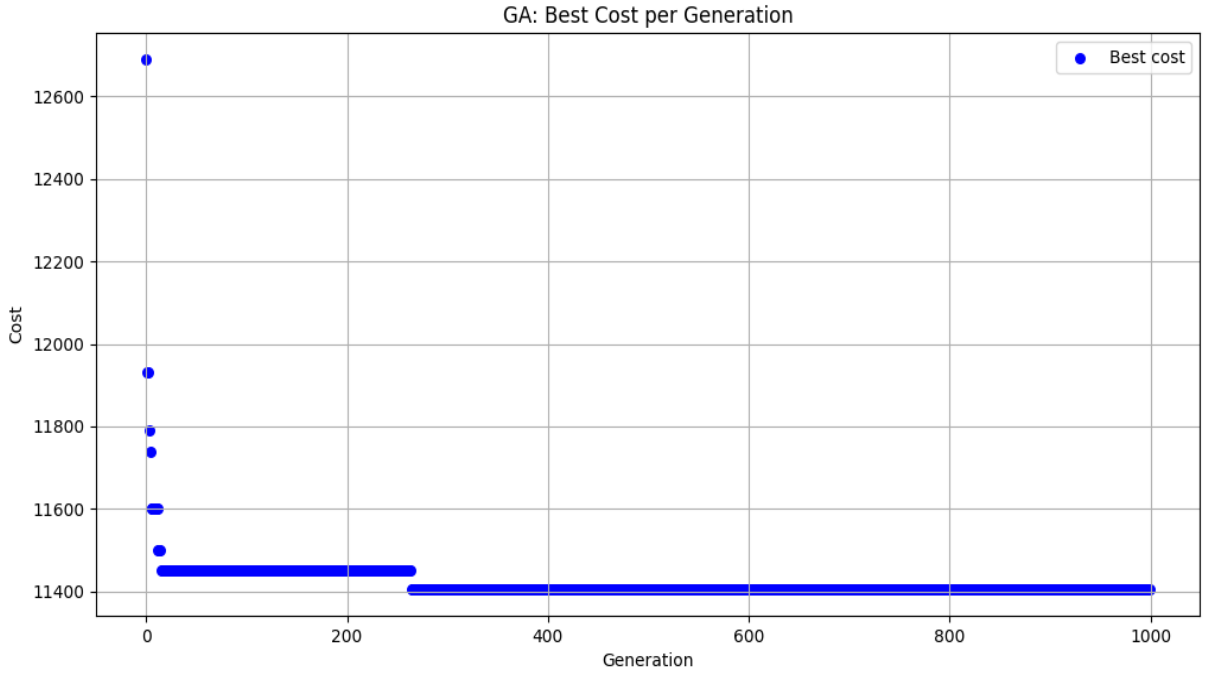

Рисунок 2. Найкраще значення цільової функції на кожній ітерації генетичного алгоритму

На рисунку 2 зображено динаміку найкращого знайденого значення цільової функції в кожному поколінні генетичного алгоритму. Спостерігається швидке зменшення значення функції в перших поколіннях, після чого процес стабілізується, що свідчить про ефективну збіжність алгоритму до якісного наближеного розв’язку.

Таблиця 1. Порівняння результатів

Показник	**Метод гілок і меж**	**Генетичний алгоритм**
Загальні витрати (грн/день)	11330	11405
Оптимальність	Глобальний оптимум	Наближений розв’язок
Час виконання (сек.)	33,5	8
Кількість ітерацій	21519	1000

Метод гілок і меж є точним підходом, який гарантує знаходження глобального оптимуму. Однак ця гарантія досягається ціною значно вищої обчислювальної складності, яка призводить до тривалішого часу виконання.

Відносне відхилення розв’язку, отриманого за допомогою ГА, від глобального оптимуму складає 0,66%. Отже, генетичний алгоритм, як представник метаевристичних методів, забезпечує швидке знаходження достатньо якісних наближених розв’язків. Його перевага полягає в здатності ефективно досліджувати простір розв’язків завдяки механізмам природного відбору, схрещування та мутації. Це дозволяє алгоритму швидко досягати

прийнятних розв’язків. А менший час виконання робить його більш придатним для розв’язання задач великої розмірності.

Висновки. Вибір методу залежить від конкретних вимог задачі: якщо пріоритетом є гарантована оптимальність розв’язку, а час розрахунку не є критичним, доцільно використовувати точні методи. Якщо ж важливіша швидкість отримання достатньо точного наближеного результату, то евристичні методи, такі як генетичний алгоритм, є кращим вибором.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Adeleke, O. J., & Olukanni, D. O. (2020). *Facility Location Problems: Models, Techniques, and Applications in Waste Management. Recycling*, *5*(2), 10. https://doi.org/10.3390/recycling5020010

[2] Меньшикова, О. В., Чмир, О. Ю., & Карабин, О. О. (2019). *Дослідження операцій: навчальний посібник.* Львів: ЛДУ БЖД.

[3] Кічмаренко, О. Д., Стехун, А. О., & Яровий, А. Т. (2024). *Дослідження операцій: навчальний посібник*. Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова.

[4] H, H. J. (2019). *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT Press.

Didenko V. R., Stekhun A. O., Yarovy A.T.

Integer programming problems of production location

Abstract. *During the research, the problem of optimal location of production facilities, which belongs to the class of integer programming problems, was considered. Two approaches were applied to solve it: the exact and the approximate one. A comparative analysis of the results obtained by both methods was carried out, and conclusions were drawn regarding their efficiency.*

Keywords: *integer programming; location problem; branch and bound method; genetic algorithm; optimisation.*