УДК 519.86

ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ПОСТАНОВОК ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Шеремет К.М.[1]; Стехун А.О., к.ф.-м.н., доц. [2]; Назаренко О.А., к.ф.-м.н., доц. [3]
[1,2]Одеський національний університет імені І.І.Мечникова
[3]Одеська державна академія будівництва та архітектури
[1,2,3]Україна, Одеса
[1]kateryna.sheremet@stud.onu.edu.ua; [2]a.stehun@onu.edu.ua; [3]oanazarenko@odaba.edu.ua

Анотація. *У роботі розглянуто транспортну задачу з обмеженнями пропускної здатності та запропоновано методичний підхід до її розв'язання. Описано алгоритм побудови початкового допустимого плану та застосування методу потенціалів для оптимізації перевезень. Проведено аналіз можливих сценаріїв та показано ефективність запропонованого підходу.*
Ключові слова: *транспортна задача; обмеження на пропускну здатність; метод потенціалів; початковий опорний план; ітераційне вдосконалення; критерій оптимальності.*

Вступна частина. Транспортна задача є однією з класичних задач лінійного програмування та широко застосовується в логістиці, постачанні та плануванні ресурсів. У практичних умовах часто виникають додаткові обмеження на маршрути перевезення, зокрема максимальна пропускна здатність комунікацій. Такі обмеження можуть бути зумовлені вантажопідйомністю транспорту, місткістю доріг або ліній передачі.

Актуальність теми полягає в тому, що класичні методи транспортної задачі не враховують обмеження пропускної здатності, що може призвести до нерозв'язності планування в реальних умовах. Сучасні дослідження показують необхідність адаптації методів побудови початкового плану та методів оптимізації.

Метою роботи є дослідження та реалізація підходів до модифікованої транспортної задачі з обмеженнями пропускної здатності, побудова допустимого опорного плану та застосування методу потенціалів для знаходження оптимального рішення.

Основна частина У межах дослідження було розглянуто транспортну задачу з обмеженнями пропускної здатності, що дозволяє враховувати ліміти маршрутів і інфраструктури. Для мінімізації витрат модель розширено шляхом уведення верхніх меж на обсяги перевезень між пунктами постачання та споживання.

Далі викладено математичну постановку задачі, метод побудови початкового плану та алгоритм перевірки й удосконалення рішень методом потенціалів з урахуванням цих обмежень.

Постановка транспортної задачі з обмеженнями пропускної здатності:

Нехай є m джерел постачання та n пунктів споживання з обсягами запасів a_i і попиту b_j. Відомі транспортні витрати c_{ij} та обмеження пропускної здатності d_{ij}. Потрібно знайти план перевезень $X = (x_{ij})_{m\times n}$, який мінімізує сумарні витрати:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \quad i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n.$$

Якщо сумарна потужність запасів дорівнює сумарному попиту, задача називається замкненою. Якщо ні — відкритою, і тоді додають фіктивне джерело або споживача для балансування [1].

Побудова початкового допустимого плану:

1. Початковий план формується адаптованим методом мінімального елемента:
2. Обирають мінімальний елемент $c_{i_1j_1} = \min c_{ij}$.
3. Призначають $x_{i_1j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}, d_{i_1j_1}\}$.
4. Оновлюють залишки запасів та попиту: $a_i = a_i - x_{i_1j_1}$, $b_j = b_j - x_{i_1j_1}$.
5. Повторюють процедуру, поки не заповнено всі рядки та стовпці.

Якщо після цього залишки $\varepsilon > 0$, вводяться фіктивні джерела та стоки для побудови опорного плану розширеної транспортної задачі. Метод потенціалів для перевірки оптимальності

Чисельний аналіз транспортної задачі, як і будь-якої задачі ЛП, істотно спирається на критерій оптимальності допустимого рішення $X = (x_{ij})_{m \times n}$.

Критерій оптимальності допустимого плану. Допустимий план $X = (x_{ij})_{m \times n}$ транспортної задачі є оптимальним тоді й тільки тоді, коли існують дійсні числа $u_1, u_2, \dots, u_m$ та $v_1, v_2, \dots, v_n$ (які називаються потенціалами відповідно постачальників і споживачів), що задовольняють таким умовам:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad \text{якщо } 0 < x_{ij} < d_{ij};$$
$$u_i + v_j \le c_{ij}, \quad \text{якщо } x_{ij} = 0;$$
$$u_i + v_j \ge c_{ij}, \quad \text{якщо } x_{ij} = d_{ij}.$$

Опорний план (базисний розв'язок) формується з основних компонентів, де $0 < x_{ij} < d_{ij}$, і система відповідних векторів A_{ij}, що відповідають основним компонентам допустимого рішення X, є лінійно незалежною [2].

Ітерація методу потенціалів:

1. Обчислюємо потенціали u_i, v_j із системи $u_i + v_j = c_{ij}$ для базисних компонент. Одну змінну можна обрати довільно (наприклад $u_1 = 0$) для спрощення обчислень.
2. Перевіряємо оптимальність: обчислюємо $C_{ij}^* = (u_i + v_j) - c_{ij}$ для небазисних компонент. План оптимальний, якщо $C_{ij}^* \le 0$ для $x_{ij} = 0$ і $C_{ij}^* \ge 0$ для $x_{ij} = d_{ij}$.
3. Поліпшення плану:
    1. Якщо $x_{i_0j_0} = 0$, збільшуємо компоненту, формуючи цикл $x_{i_0j_0}, x_{i_0j_1}, x_{i_1j_1}, \dots, x_{ik j_0}$ і коригуємо непарні та парні компоненти циклу на $C^* = \min\{C_1^*, C_2^*, d_{i_0j_0}\}$.
    2. Якщо $x_{i_0j_0} = d_{i_0j_0}$, зменшуємо компоненту по аналогії, визначаючи C^* та коригуючи компоненти циклу відповідно.

Метод гарантує знаходження оптимального плану через скінченну кількість ітерацій, оскільки цільова функція монотонно спадає, а число опорних планів обмежене [3].

Приклад розв'язання транспортної задачі з обмеженнями модифікованим методом потенціалів.

Розглянемо транспортну задачу з обмеженнями на пропускні спроможності комунікацій:

$$a = (6,3,3), \quad b = (4,2,4,2), \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Побудова початкового опорного плану. Використовуємо модифікований метод мінімального елемента з урахуванням обмежень D. На кожному кроці обираємо мінімальний елемент матриці C і присвоюємо йому величину $\min\{a_i, b_j, d_{ij}\}$, після чого відповідні запаси та попит зменшуються, а використаний рядок або стовпець викреслюється. Оскільки $\varepsilon = x_{43} = x_{15} = 1$. Тому необхідно перейти до розв'язання розширеної транспортної задачі з матрицею і векторами

1(3) 3	4(1) 0	2(2) 2	5(1) 0	M 1	6
2(1) 0	1(1) 1	4(1) 0	1(2) 2	M 0	3
3(2) 1	2(1) 1	1(1) 1	3(1) 0	M 0	3
M 0	M 0	M 1	M 0	0 0	1
4	2	4	2	1	

Ітераційне поліпшення плану. Після побудови початкового плану визначаємо потенціали u_i, v_j і обчислюємо величини $C_{ij}^* = (u_i + v_j) - c_{ij}$. Якщо існує $C_{ij}^* > 0$ для елементів, які не входять у базис, або $C_{ij}^* < 0$ для елементів у додатковому

наборі $D(X)$, план не є оптимальним.

Введення змінної у базис. Наприклад, для покращення вибираємо змінну x_{45}. Вона утворює єдиний цикл: $x_{45} \to x_{15} \to x_{14} \to x_{24} \to x_{23} \to x_{43} \to x_{45}$.

Непарні змінні циклу збільшуються на $C^* = 1$, парні — зменшуються на $C^* = 1$. З циклу виключаємо змінну, що стає нульовою.

1(3) 4	4(1) 0	2(2) 6	5(1) 0	M 1	6
2(1) -1	1(1) -1	4(1) 0	1(2) 2	M -4	3
3(2) 1	2(1) 1	1(1) 5	3(1) 0	M -2	3
M -3	M -4	M 1	M -3	0 2M-8	1
4	2	4	2	1	

Подальші ітерації. Повторюємо визначення потенціалів та обчислення C_{ij}^*, додаючи у базис нові змінні та коригуючи цикл, поки всі умови оптимальності не виконуються:

$C_{ij}^* \le 0$ для елементів поза базисом, $C_{ij}^* \ge 0$ для елементів додаткового набору $D(X)$.

Результат: після кількох ітерацій отримано оптимальний план, який задовольняє обмеження на пропускні спроможності.

1(3) 3	4(1) 1	2(2) 2	5(1) 0	6
2(1) 0	1(1) 0	4(1) 1	1(2) 2	3
3(2) 1	2(1) 1	1(1) 1	3(1) 0	3
4	2	4	2	

Висновки У роботі підтверджено, що метод потенціалів залишається ефективним інструментом оптимізації навіть у розширених формулюваннях транспортної задачі. Обмеження пропускної здатності потребують модифікації критеріїв оптимальності та правил корекції плану, проте основні принципи ітераційного пошуку зберігаються. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на автоматизацію розрахунків і застосування методу в багатокритеріальних моделях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Кічмаренко, О. Д., Стехун, А. О., & Яровий, А. Т. (2024). *Дослідження операцій: навчальний посібник*. Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова.

[2] Taha, H. A. (2003). *Operations research: An introduction* (7th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

[3] Меншикова, О. В., Чмир, О. Ю., & Карабин, О. О. (2019). *Дослідження операцій: навчальний посібник.* Львів: Львівський державний університет безпеки життєдіяльності.

Sheremet K.M., Stekhun A.O., Nazarenko O.A.

Approaches to solving non-standard formulations of the transportation problem

Abstract*. The paper examines the transportation problem with capacity constraints and proposes a methodological approach to its solution. The algorithm for constructing an initial feasible plan and the application of the potential method for optimizing transportation are described. An analysis of possible scenarios is conducted, demonstrating the effectiveness of the proposed approach.*

Keywords: *transportation problem; capacity constraints; potential method; initial basic plan; iterative improvement; optimality criterion.*