УДК 004.75:004.052.3

# СТОХАСТИЧНА МЕРЕЖА ПЕТРІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ КОНКУРЕНТНИХ РЕСУРСНИХ ПРОЦЕСІВ АВТОНОМНОЇ КІБЕРФІЗИЧНОЇ СИСТЕМИ

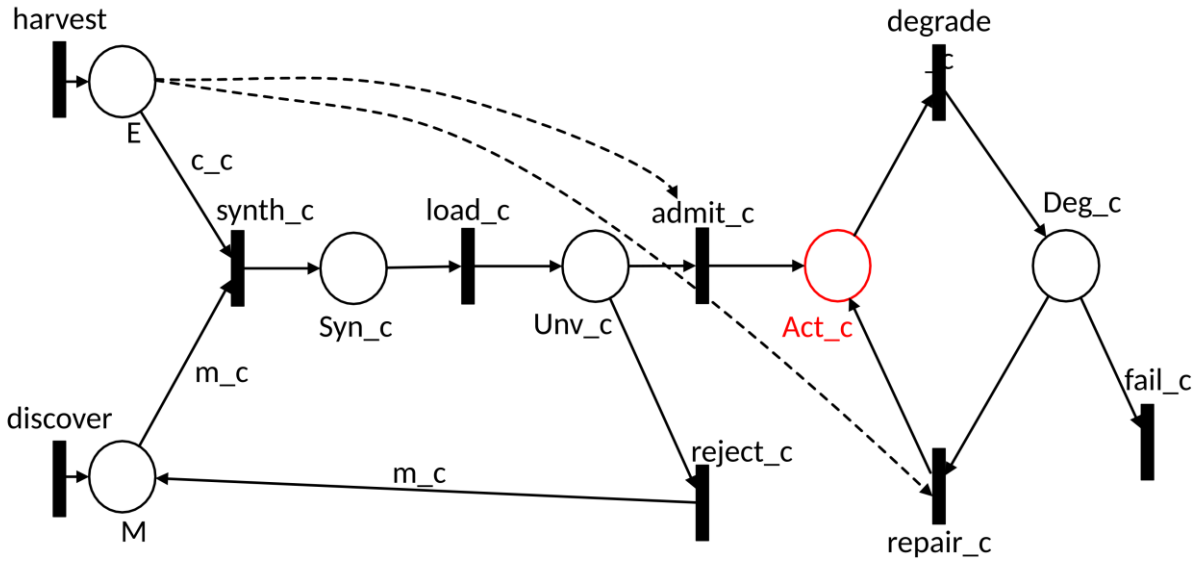
Главчев М. І., к.е.н., доц.[1]
[1]Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
[1]Україна, Харків
[1]ORCID: 0000-0001-9670-9118

***Анотація.*** *Запропоновано кольорову стохастичну мережу Петрі для спільного опису надходження та витрат енергії, апаратного ресурсу, синтезу, допуску, деградації й відновлення вузлів автономної кіберфізичної системи. Побудована модель дає змогу аналітично оцінювати середній час до втрати системи та середню кількість активних вузлів. Аналітичні оцінки перевірено імітацією; максимальна розбіжність за дослідженими конфігураціями не перевищила 2,4 %.*
***Ключові слова:*** *стохастична мережа Петрі; структурна самореплікація; ресурсний баланс; автономність; MTTE.*

**Вступ.** Автономна кіберфізична система, здатна створювати нові обчислювальні вузли, одночасно витрачає кілька дефіцитних ресурсів. Енергія потрібна не лише для цільового навантаження, а й для синтезу, допуску, службового обміну та відновлення; апаратний запас поповнюється нерегулярно і витрачається дискретно; деградація та відмова вузлів мають випадковий характер. Через це проста балансова модель не відображає конкуренцію процесів, а детальна імітація ускладнює аналітичне порівняння політик. Сучасні роботи підтверджують придатність мереж Петрі для оцінювання адекватності моделей комп’ютерних систем та задач розподілу обмежених ресурсів [1, 2]. Водночас для структурно самореплікованої системи потрібно в одній моделі поєднати ресурсні потоки, стани життєвого циклу вузла і випадкові переходи між ними.

**Мета дослідження.** Побудувати компактну стохастичну модель конкурентних ресурсних процесів, у якій поява, інтеграція, деградація та відновлення вузлів безпосередньо залежать від доступної енергії й апаратного запасу, а також отримати кількісні показники автономності та перевірити аналітичний розв’язок незалежною імітацією.

**Основний текст.** Для опису системи використано кольорову стохастичну мережу Петрі (КСМП). Кольори фішок відокремлюють два типи компонентів – обчислювальні вузли C та ретранслятори R, а стохастичні переходи задають випадкові моменти подій. Така побудова спирається на апарат кольорових мереж Петрі [3] і стохастичних мереж, де часові характеристики переходів пов’язують граф досяжності з неперервним марковським ланцюгом [4]. На відміну від моделі, в якій енергія є лише числовим параметром, тут енергетичні кванти та одиниці апаратного ресурсу є окремими місцями мережі і безпосередньо блокують або дозволяють структурні переходи.




E – кванти енергії; M – апаратний ресурс; c – тип вузла C або R (колір фішки); пунктир – споживання енергії

Рис. 1. Структура кольорової стохастичної мережі Петрі ресурсних переходів (для одного кольору фішок c)

**У моделі** енергетичний накопичувач E має місткість 10 квантів, запас апаратного ресурсу M – 4 одиниці, а сумарна кількість вузлів обмежена чотирма. Для кожного кольору виділено стани синтезу, неперевіреного, активного та деградованого вузла. Переходи harvest і discover поповнюють відповідні ресурси; consume відображає поточні витрати; synth, load та admit послідовно формують і вводять вузол у роботу; reject повертає апаратний ресурс після невдалого допуску; degrade, repair і fail описують погіршення стану, відновлення та остаточну втрату компонента. Взаємозв'язок ресурсів і станів наведено на рис. 1.

**Ключовою особливістю** є охоронна умова синтезу. Новий вузол може бути створений лише за наявності активного донора, достатнього апаратного ресурсу, вільного місця в структурному ліміті та енергетичного залишку не нижче резерву θ після завершення операції. Тому θ виступає не пасивним запасом, а параметром політики, який змінює саму множину доступних переходів. Допуск неперевіреного вузла і відновлення деградованого також потребують енергії. Для переходу harvest використано інгібіторну умову: поповнення припиняється, коли накопичувач заповнений. У результаті мережа безпосередньо відтворює конкуренцію між розширенням системи та збереженням її поточної працездатності.

**Для прийнятих місткостей** повний граф досяжності містить 20 295 станів. Мережа є обмеженою, оскільки місткості ресурсних місць і максимальна кількість вузлів не можуть бути перевищені. Виявлено один поглинальний клас, що відповідає втраті всіх вузлів: після зникнення останнього активного донора синтез стає неможливим навіть за наявності енергії та апаратного запасу. Тому природним інтегральним показником автономності є середній час до вимирання системи (MTTE), а другим показником – очікувана кількість активних вузлів упродовж цього часу.

**Аналітичне оцінювання** виконано на генераторі неперервного марковського ланцюга, породженого графом досяжності. Для транзитивних станів розв'язано систему лінійних рівнянь для середнього часу до поглинання; як чисельний метод застосовано GMRES з передобумовленням, а для контролю – пряму LU-факторизацію в складних випадках. Незалежну перевірку виконано точним стохастичним моделюванням методом Гіллеспі [5].

Для кожної контрольної конфігурації проведено 400 реалізацій, що дозволило порівняти не лише середні значення, а й 95 % довірчі інтервали.

Таблиця 1

Перевірка аналітичної оцінки MTTE імітацією Гіллеспі

| θ | λ_h | MTTE, аналіт. | MTTE, імітація | 95 % ДІ | Розбіж-ність | Активних, аналіт. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,6 | 373,1 | 377,0 | 341,6–412,3 | 1,0 % | 1,136 |
| 4 | 0,6 | 387,8 | 393,3 | 356,7–429,9 | 1,4 % | 1,226 |
| 4 | 1,0 | 794,8 | 776,0 | 722,3–829,7 | 2,4 % | 1,904 |

**Результати верифікації.** У всіх трьох контрольних конфігураціях аналітична оцінка MTTE потрапила до 95 % довірчого інтервалу імітації, а максимальна відносна розбіжність становила 2,4 % (табл. 1). Це підтверджує, що редукція ресурсних процесів до КСМП не спотворює головні часові характеристики в межах прийнятих припущень. Для моделі важливо не лише відтворити середню кількість вузлів, а й коректно описати рідкісні траєкторії, що ведуть до поглинального стану, оскільки саме вони визначають автономність.

**Аналіз параметрів.** Підвищення інтенсивності надходження енергії λ_h від 0,4 до 1,0 збільшувало MTTE приблизно у 3,4 раза без резерву та у 3,5 раза за θ = 6. Водночас резерв діяв нелінійно. За θ = 6 порівняно з θ = 0 середній час існування зростав на 8,2 % при λ_h = 0,4 і на 11,3 % при λ_h = 1,0 (від 734 до 817 одиниць часу). Невеликий резерв не завжди корисний: при θ = 2 та λ_h = 0,4 MTTE був на 2,6 % меншим, ніж без резерву. Причина полягає в тому, що слабке обмеження вже відкладає синтез, але ще не формує достатнього енергетичного буфера для переживання несприятливої ділянки процесу.

**Практичне значення.** Отриманий ефект показує, що правило резерву не можна вибирати як довільний «запас на безпеку». Воно має бути узгоджене з темпом надходження енергії, вартістю синтезу та інтенсивністю деградації. КСМП дає змогу перевірити ці співвідношення до переходу до складнішої політики прийняття рішень: оцінити, чи допускає певний резерв надмірну реплікацію, чи навпаки блокує корисне розширення, і як зміна вартості вузлів C/R впливає на автономність. Такий аналіз придатний для попереднього налаштування Energy-Sharing-політики та цифрового двійника системи.

**Структурний зміст поглинального стану.** Важливо, що поглинання в цій моделі не тотожне нульовому запасу енергії. Система може мати заповнений накопичувач і вільний апаратний ресурс, але залишитися нездатною до відновлення, якщо втрачено всі вузли, що можуть виступати донорами синтезу. Отже, ресурсна достатність не гарантує структурної життєздатності. Саме ця відмінність робить MTTE кориснішим за просту оцінку тривалості енергопостачання: показник враховує взаємний вплив ресурсу, життєвого циклу вузлів і наявності механізму відтворення. Для автономних платформ у віддалених або небезпечних середовищах це означає, що резерв потрібно формувати не лише у вигляді енергії, а й у вигляді збереженої здатності до синтезу та відновлення.

**Обмеження моделі.** Аналітична мережа навмисно компактна: інтенсивності переходів вважаються стаціонарними, енергія агрегується в кванти, а пропускна здатність каналів та просторові обмеження не входять до стану КСМП. Це дозволяє повністю побудувати граф досяжності й отримати точні оцінки для малої системи, але спричиняє вибух станів при безпосередньому масштабуванні. Тому КСМП доцільно використовувати як еталонну

аналітичну модель для малих конфігурацій та калібрування параметрів, а великі системи досліджувати методами агрегування і цифрового двійника.

**Висновки.** Побудована кольорова стохастична мережа Петрі формалізує конкуренцію енергії й апаратного ресурсу між синтезом, допуском, роботою, деградацією та відновленням вузлів. Для прийнятої конфігурації отримано 20 295 досяжних станів і один поглинальний стан втрати системи. Аналітичний MTTE узгоджується з імітацією Гіллеспі з розбіжністю не більш як 2,4 %. Показано, що достатній енергетичний резерв підвищує автономність, але малий резерв може погіршувати результат; отже, поріг реплікації має визначатися разом з інтенсивністю енергонадходження. Модель може використовуватися для обґрунтування параметрів ресурсно-орієнтованого керування перед їх перевіркою у масштабнішому цифровому двійнику.

**Використання інструментів ШІ.** OpenAI ChatGPT, модель GPT-5.6 Sol, використано для мовно-стилістичного редагування, реорганізації викладу та перевірки відповідності структури тез вимогам шаблону. Наукова постановка, параметри моделі, числові результати, таблиця та висновки ґрунтуються на виконаному автором дослідженні; ШІ не використовувався для генерування первинних експериментальних даних.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


[1] Shyman, A., Kuchuk, N., Filatova, A., & Bellorin-Herrera, O. (2024). Development of a method for assessing the adequacy of a computer system model based on Petri nets. *Advanced Information Systems*, *8*(3), 46–52. https://doi.org/10.20998/2522-9052.2024.3.05

[2] Lv, J., & Huang, B. (2024). A Petri-net-based anytime A* search for scheduling resource allocation systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, *20*(2), 2865–2872. https://doi.org/10.1109/TII.2023.3296909

[3] Jensen, K., Kristensen, L. M., & Wells, L. (2007). Coloured Petri nets and CPN Tools for modelling and validation of concurrent systems. *International Journal on Software Tools for Technology Transfer*, *9*(3–4), 213–254. https://doi.org/10.1007/s10009-007-0038-x

[4] Molloy, M. K. (1982). Performance analysis using stochastic Petri nets. *IEEE Transactions on Computers*, *C-31*(9), 913–917. https://doi.org/10.1109/TC.1982.1676110

[5] Gillespie, D. T. (1977). Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions. *The Journal of Physical Chemistry*, *81*(25), 2340–2361. https://doi.org/10.1021/j100540a008



Glavchev M. I., PhD in Economics, Associate Professor


**Stochastic petri net for modeling competing resource processes in an autonomous cyber-physical system**


***Abstract.*** *A coloured stochastic Petri net is proposed to jointly represent energy inflow and consumption, hardware-resource availability, node synthesis, admission, degradation and repair. The induced continuous-time Markov chain is used to estimate the mean time to extinction and the expected number of active nodes. Analytical estimates were validated by Gillespie simulation; the maximum discrepancy for the tested configurations was 2.4 %. The model can support calibration of resource-aware replication policies before large-scale digital-twin experiments.*



***Keywords****: stochastic Petri net; structural self-replication; resource balance; autonomy; mean time to extinction.*