УДК 519.85

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ПІДВИЩЕННЯ ВІДМОВОСТІЙКОСТІ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ КРИТИЧНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ ЗАЛИШКОВИХ КЛАСІВ

Ковальчук Д.М., PhD (комп'ютерні науки)[1]
[1] Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
[1] Україна, Харків
[1] ORCID 0000-0002-8229-836X

Анотація. *У роботі досліджено математичні основи застосування системи залишкових класів для підвищення відмовостійкості телекомунікаційних мереж критичного призначення. Розглянуто особливості модулярного подання інформації, паралельного виконання арифметичних операцій та використання надлишкових модулів для виявлення й корекції помилок. Обґрунтовано можливості інтеграції СЗК у розподілену мережеву інфраструктуру для підвищення достовірності інформаційного обміну та стійкості до локальних збоїв.*
Ключові слова: *система залишкових класів; модулярна арифметика; відмовостійкість; телекомунікаційні мережі; критична інфраструктура.*

Вступ. Сучасні телекомунікаційні мережі критичного призначення є основою функціонування систем управління, енергетичної інфраструктури, транспортних комплексів, промислових об'єктів і служб екстреного реагування. Особливістю таких мереж є необхідність забезпечення безперервного передавання інформації навіть за умов виникнення апаратних збоїв, пошкодження каналів зв'язку, перевантаження окремих вузлів або часткової втрати мережевої інфраструктури. Відмова окремих компонентів може призвести до порушення інформаційного обміну, затримки передавання критично важливих повідомлень і втрати керованості технологічними процесами. Традиційні підходи до забезпечення відмовостійкості, що ґрунтуються на резервуванні обладнання, дублюванні каналів і використанні протоколів повторного передавання, не завжди забезпечують необхідний рівень надійності та оперативності функціонування мережі [1].

Одним із перспективних напрямів розв'язання зазначеної проблеми є застосування непозиційних систем числення, зокрема системи залишкових класів (СЗК). Використання модулярної арифметики дає змогу організувати незалежну обробку інформаційних компонентів, локалізувати помилки та реалізувати паралельні обчислювальні процеси. На відміну від традиційного позиційного подання чисел, у якому помилка окремого розряду може впливати на результат обчислень загалом, СЗК передбачає представлення інформації у вигляді набору незалежних залишків за взаємно простими модулями. Це створює передумови для побудови розподілених обчислювальних структур із підвищеною стійкістю до локальних збоїв [1, 2].

Актуальність дослідження визначається необхідністю пошуку математичних методів підвищення надійності телекомунікаційних мереж, здатних забезпечувати достовірність інформаційного обміну в умовах нестабільного функціонування окремих компонентів. Особливого значення набуває використання надлишкових систем залишкових класів, які дозволяють не лише виявляти спотворення даних, але й створюють математичну основу для їх корекції.

Метою роботи є дослідження математичних основ застосування системи залишкових

класів для підвищення відмовостійкості телекомунікаційних мереж критичного призначення, обґрунтування властивостей модулярного подання інформації та визначення можливостей його використання для локалізації помилок, організації паралельної обробки й підвищення достовірності передавання даних.

Основна частина. Система залишкових класів є непозиційною системою числення, у якій цілі числа представляються не через вагові коефіцієнти розрядів, а за допомогою набору залишків від ділення на задані модулі. Нехай задано множину модулів $m_1, m_2, \ldots, m_n$, які є попарно взаємно простими, тобто $\gcd(m_i, m_j) = 1, \quad i \neq j$. Тоді довільне ціле число A може бути представлене у вигляді набору залишків $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де кожний залишок визначається співвідношенням $a_i = A \bmod m_i$. Діапазон однозначного представлення чисел у СЗК визначається добутком усіх модулів $M = \prod_{i=1}^{n} m_i$. Таким чином, кожному цілому числу з діапазону $[0, M)$ відповідає унікальний набір залишків. Зазначена властивість є математичною основою використання СЗК для представлення та обробки інформації в розподілених обчислювальних структурах [1 – 3].

Однією з основних переваг модулярного подання є незалежність виконання арифметичних операцій за окремими модулями. Нехай числа A і B представлені відповідними наборами залишків:

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Тоді арифметичні операції виконуються незалежно за кожним модулем. Наприклад, для операції множення чисел:

$$C = A \cdot B,$$

$$c_i = (a_i \cdot b_i) \bmod m_i.$$

Таким чином, результат кожної арифметичної операції формується як набір залишків, отриманих шляхом незалежного виконання відповідних обчислень за кожним модулем [3, 4].

Для збереження однозначності результату необхідно враховувати діапазон представлення чисел. Для множення результат має задовольняти умові $0 \le A \cdot B < M$.

Якщо результат виходить за межі діапазону СЗК, його відновлення потребує врахування переповнення або використання додаткових модулів. Відсутність міжрозрядних переносів між окремими модульними каналами дозволяє виконувати арифметичні операції паралельно, що створює передумови для підвищення швидкодії обробки інформації [4].

Застосування системи залишкових класів для побудови відмовостійких обчислювальних структур визначається сукупністю її математичних і структурних властивостей.

Першою важливою властивістю є незалежність залишків. Кожному модулю відповідає окремий обчислювальний тракт, який виконує операції над відповідною компонентою модулярного представлення. У телекомунікаційній системі така структура може бути реалізована у вигляді сукупності незалежних обчислювальних або інформаційних каналів, кожен із яких відповідає за обробку окремої модульної компоненти. Виникнення помилки в одному з трактів за відсутності додаткових міжканальних залежностей не призводить до автоматичного спотворення інших залишків.

Це створює можливість локалізації помилок і зменшує ризик їх поширення на всю

обчислювальну структуру. Наприклад, у вузлах обробки телекомунікаційної інформації окремі модульні канали можуть використовуватися для паралельного виконання операцій над даними, що надходять від різних мережевих компонентів. У разі виникнення збою в одному з таких каналів інші можуть продовжувати функціонування за умови збереження необхідних даних і коректності подальшого відновлення результату.

Другою властивістю є рівноправність модульних компонентів у представленні числа. Кожний залишок є результатом застосування окремого модуля до початкового числа, а тому не має позиційної ваги, характерної для традиційних систем числення. Проте окремий залишок сам по собі не визначає початкове число однозначно. Для відновлення повного значення необхідна сукупність залишків або використання додаткової надлишковості. Саме тому для забезпечення відмовостійкості доцільно застосовувати надлишкову систему залишкових класів, яка передбачає введення додаткових контрольних модулів.

Третьою властивістю є малорозрядність залишків. Оскільки значення кожної модульної компоненти обмежене відповідним модулем, обчислювальні операції можуть виконуватися з використанням відносно коротких розрядних структур. Це створює передумови для зменшення складності окремих обчислювальних трактів, підвищення швидкодії модульних операцій та ефективнішого використання ресурсів мережевих вузлів.

Таким чином, незалежність залишків, можливість введення надлишковості та малорозрядність модульних компонентів формують математичну основу для побудови відмовостійких структур обробки інформації, які можуть бути інтегровані в телекомунікаційні мережі критичного призначення.

Для підвищення достовірності інформаційного обміну доцільно використовувати надлишкову систему залишкових класів (НСЗК), яка передбачає додавання до основного набору інформаційних модулів додаткових контрольних модулів [4].

Нехай інформаційна частина системи містить n модулів, а контрольна – k додаткових модулів. Тоді загальна система задається множиною $\{m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}, \ldots, m_{n+k}\}$. Для передавання інформації число A представляється набором залишків $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$, де $a_i = A \bmod m_i, \quad i = 1, \ldots, n+k.$

Основні модулі забезпечують інформаційне представлення числа, тоді як додаткові використовуються для контролю правильності отриманих залишків. Під час приймання даних контрольні компоненти можуть застосовуватися для перевірки узгодженості прийнятого набору з допустимим кодовим представленням.

Виникнення помилки в одному або декількох залишках призводить до порушення відповідності між отриманим набором і допустимими кодовими комбінаціями. Для виявлення таких порушень можуть використовуватися процедури контролю надлишковості, декодування та обчислення контрольних співвідношень.

Кількість контрольних модулів визначає потенційні можливості системи щодо виявлення та корекції помилок. Для відповідних надлишкових кодових конструкцій за умови використання належного декодера k контрольних компонентів можуть забезпечувати виявлення до k помилкових залишків або виправлення до $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ помилкових залишків. Фактичні можливості залежать від параметрів кодової структури, співвідношення модулів, діапазону допустимих значень і застосованого алгоритму декодування.

У контексті телекомунікаційних мереж критичного призначення такий підхід може

використовуватися для контролю цілісності інформаційних блоків, виявлення спотворень під час передавання даних і підвищення достовірності інформації, що надходить до вузлів обробки. При цьому надлишкове модулярне кодування не замінює резервування фізичних каналів зв'язку або мережевого обладнання, а доповнює їх на рівні математичного контролю та відновлення інформації.

Отже, застосування надлишкової СЗК дає змогу підвищити можливості контролю цілісності інформації, проте введення додаткових модулів збільшує обсяг оброблюваних даних і потребує додаткових обчислювальних ресурсів. Тому під час проєктування телекомунікаційних мереж необхідно враховувати компроміс між рівнем надлишковості, швидкодією та обчислювальними витратами.

Висновки. У роботі досліджено математичні основи застосування системи залишкових класів для підвищення відмовостійкості телекомунікаційних мереж критичного призначення. Розглянуто принципи модулярного подання інформації, особливості виконання арифметичних операцій за незалежними модулями та властивості СЗК, які створюють передумови для побудови паралельних обчислювальних структур. Обґрунтовано доцільність використання надлишкової системи залишкових класів для виявлення, локалізації та корекції помилок у процесі обробки й передавання інформації. Визначено можливості інтеграції модулярного подання даних у багаторівневу архітектуру телекомунікаційних мереж, де математичний контроль цілісності інформації доповнює механізми резервування каналів зв'язку та обчислювальних вузлів. Встановлено, що застосування СЗК може сприяти підвищенню достовірності інформаційного обміну, зменшенню впливу локальних обчислювальних помилок і забезпеченню паралельної обробки даних.

Використання інструментів ШІ. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи**.**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Ковальчук, Д. (2025). Концепція побудови високопродуктивних систем реального часу з використанням системи залишкових класів. *Інформаційні технології та суспільство,* 3(18), 77–82. https://doi.org/10.32689/maup.it.2025.3.10

[2] Yanko, A., Krasnobayev, V., & Martynenko, A. (2023). Influence of the number system in residual classes on the fault tolerance of the computer system. *Radioelectronic and Computer Systems,* (3), 159–172. https://doi.org/10.32620/reks.2023.3.13

[3] Koshman, S., Krasnobayev, V., Nikolsky, S., & Kovalchuk, D. (2023). The structure of the computer system in the residual classes. *Advanced Information Systems,* 7(2), 41–48. https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.2.06

[4] Янко, А. С., Глушко, А. Д., Крук, О. І., & Прокудін, А. Ю. (2024). Підвищення ефективності процесу корекції даних у системі залишкових класів. *Системи управління, навігації та зв'язку,* 4(78), 169–175. https://doi.org/10.26906/SUNZ.2024.4.169

Kovalchuk D. M.

Mathematical Foundations for Enhancing the Fault Tolerance of Mission-Critical Telecommunication Networks Based on the Residue Number System

Abstract. *This paper investigates the mathematical foundations of applying the residue number system to improve the fault tolerance of mission-critical telecommunications networks. The principles of modular data representation, parallel arithmetic operations, and the use of redundant moduli for error detection and correction are considered. The potential for integrating the RNS into distributed network infrastructure to improve the reliability of information exchange and resilience to localized failures is substantiated.*

Keywords: *residue number system; modular arithmetic; fault tolerance; telecommunications networks; critical infrastructure.*